Llista 6: Canvis de base i matrius d'aplicacions lineals.

Canvis de Base

1. Demostreu que els vectors $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ i $(1,1,1)$ són base de $\mathbb{R}^3$. Trobeu la matriu del canvi de base de la canònica a la base anterior. Utilitzeu-la per calcular les components del vector $(-1,-2,7)$ en la nova base.

2. Escriviu $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ en la base donada:

   (a) $(1,0,0),(0,0,1),(1,1,1)$

   (b) $(1,0,-1),(-1,1,0),(0,1,1)$

   (c) $(2,1,3),(-1,4,5),(3,-2,-4)$

3. Si el vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ té components $(4,-1)$ en la base $\{(2,-5),(7,3)\}$, quines són les seves components en la base $\{(-2,1),(-3,2)\}$?

4. Considereu els vectors de $\mathbb{R}^3$ següents:

$$\vec{u}=(1,1,1)\qquad \vec{v}=(1,1,0)\qquad \vec{w}=(1,-1,0)\qquad \vec{z}=(0,0,2).$$

   Quines de les afirmacions següents són certes?

   (a) $\langle\vec{v},\vec{w}\rangle=\langle\vec{u},\vec{z}\rangle$.

   (b) Els vectors $\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{z}$ són un sistema de generadors de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Les components de $\vec{u}$ en la base $\{\vec{v},\vec{w},\vec{z}\}$ són $(1,0,\frac{1}{2})$.

5. Sigui v_1,v_2,v_3 una base de $\mathbb{R}^3$. Definim

$$u_1=v1+v_2,\ u_2=v_1+v_3,\ u_3=v_2+v_3.$$

   Trobeu la matriu del canvi de base. Escriviu els vectors

$$v_1+v_2+v_3,\ 2\,v_1+5\,v_3,\ \sqrt{2}\,v_2+\sqrt{3}\,v_3,\ \frac{3}{2}\,v_1+\frac{7}{5}\,v_2-\frac{4}{3}\,v_3$$

   en la base $\{u_1,u_2,u_3\}$. Escriviu els vectors

$$u_1+12\,u_2-u_3,\ \sqrt{5}\,u_1-3\,u_2,\ u_2+345\,u_3,\ 7.3\,u_1-10.5\,u_2+22.1\,u_2$$

   en la base $\{v_1,v_2,v_3\}$.

Matrius d'Aplicacions Lineals

1. Sigui $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ una aplicació lineal tal que $f(1,1)=3$ i $f(1,0)=4$. Quant val $f(2,1)$? Quant val $f(x,y)$?

2. Sigui $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una aplicació lineal tal que $f(3)=-4$. Obteniu l'expressió de $f(x)$. És f un isomorfisme?

3. Sigui

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (0,x,y) \end{array}$$

   (a) Demostreu que f és una aplicació lineal.

   (b) Trobeu $\ker f$ i $\operatorname{Im} f$, així com dimensions i bases respectives.

(c) Trobeu $f^2 = f \circ f \quad \text{i} \quad f^3 = f \circ f \circ f$.

(d) Trobeu $\ker f^2$, $\ker f^3$, $\mathrm{Im}\, f^2$ i $\mathrm{Im}\, f^3$. Quina relació hi ha entre ells?

4. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per:

$$f(2,1,0) = (4,2,2) \qquad f(0,1,1) = (0,1,1) \qquad f(2,0,1) = (0,4,2).$$

Trobeu la matriu de f en la base canònica i estudieu el nucli i la imatge de f.

7. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida per:

$$f(1,2) = (2,1,3) \qquad\qquad f(2,3) = (1,0,2).$$

Trobeu la matriu de f en les bases

(a) $\{(3,5),\ (1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ i canònica de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{(3,5),\ (1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ i $\{(1,1,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

8. Donada l'aplicació lineal

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longrightarrow & (2x+y, y-z) \end{array}$$

trobeu la matriu associada en les bases:

(a) canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$

(b) $\{(1,1,1),\ (0,1,2),\ (0,2,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $\{(2,1),\ (1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Calculeu $\ker f$ i $\mathrm{Im}\, f$, així com dimensions i bases respectives.

9. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ que, en la base canònica, té per matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trobeu la matriu de f en la base $\{(1,0,0),(0,2,0),(-1,-1,1)\}$.

10. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ donat en la base canònica per

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Trobeu la seva matriu en la base $\{(1,0,0),\ (1,-1,1),\ (2,0,1)\}$. Denotem-la B.

(b) Comproveu que $A^n = A$ per a tot n. És cert també que $B^n = B$?

(c) Donat un endomorfisme g direm que és *idempotent* (o que és un *projector*) si satisfà $g^2 = g$. Anàlogament, una matriu es diu idempotent quan $M^2 = M$. Comproveu que g és idempotent si i només si la matriu que el representa, en qualsevol base, és idempotent.

(d) Proveu que g és idempotent si i només si $I - g$ és idempotent.

(e) Proveu que si g és idempotent, aleshores $\mathbb{R}^3 = \ker g + \mathrm{Im}\, g$.

11. Siguin $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ i f un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ tal que:

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \qquad f(e_3) = e_1 \qquad \ker f = \langle e_1 + e_2 \rangle.$$

(a) Escriviu la matriu de f en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(b) Calculeu $f(4e_1 - e_2 + 3e_3)$.

(c) Estudieu el nucli i la imatge de f, f^2 i f^3.

(d) És $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$?

12. Construïu un endomorfisme a $\mathbb{R}^4$ tal que:

$$\begin{aligned} f^2 &= f \\ \ker f &= \langle e_1, e_2 \rangle \\ \mathrm{Im} f &= \langle e_3, e_4 \rangle \end{aligned}$$

on $e_1 = (1, 3, 0, 0)$, $e_2 = (3, -1, 0, 0)$ $e_3 = (0, 0, 1, 3)$ i $e_4 = (0, 0, 3, -1)$.

Calculeu la seva matriu en la base canònica.

13. Siguin:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y + z, 0) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y) & \mapsto & (x, y, x + y, x - y). \end{array}$$

(a) Proveu que són lineals i estudieu els nuclis i les imatges.

(b) Trobeu la matriu de $g \circ f$ en bases canòniques i estudieu el seu nucli i la seva imatge.

(c) Trobeu la imatge de $(1, 2, 3)$ per $g \circ f$.

14. Sigui $P_n[x] = \{$polinomis a coeficients reals amb grau $\leq n\}$. De les aplicacions següents estudieu quines són lineals i, en cas de ser-ho, escriviu les matrius en les bases $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ de $P_n[x]$, i estudieu els nuclis i les imatges:

(a) $P_2[x] \longrightarrow P_2[x]$ $\quad p(x) \mapsto p'(x)$

(b) $P_n[x] \longrightarrow P_n[x]$ $\quad p(x) \mapsto (x + 1)p'(x)$

(c) $P_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad p(x) \mapsto p(2)$

(d) $P_2[x] \longrightarrow P_1[x]$ $\quad p(x) \mapsto$ reste de la divisió per $x^2 + 1$.

15. Considereu els endomorfismes de $\mathbb{R}^3$ de la forma:

$$f_r(x, y, z) = (2x + y + 2z, x + y, x + 2y + rz).$$

Trobeu el valor de r per al qual el rang de f_r sigui mínim. Per a aquest valor de r:

(a) Estudieu el nucli i la imatge de f_r.

(b) Existeix algun t tal que $(3, 2, t) \in \ker f_r$?

(c) Trobeu l'antiimatge del vector $f_r(1, 2, 1)$.

16. Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial E tal que $f^2 + f + I = 0$. Demostreu que f és un automorfisme i calculeu el seu invers.

17. Demostreu que si f és un monomorfisme i $v_1, \ldots, v_n$ són vectors linealment independents, aleshores $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ també són linealment independents.

18. Donada una base $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ es defineix l'endomorfisme f per:

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \qquad f(e_2) = 2e_1 + 3e_2.$$

Obteniu l'aplicació inversa, doneu-ne l'expressió general i la seva matriu associada en la base $\{e_1, e_2\}$.

19. Donat l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ que té per matriu associada

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

demostreu que per a qualsevol valor de λ la dimensió de la imatge és 2. Trobeu el nucli i la imatge per a $\lambda = -2$.

20. Donat l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per:

$$f(x, y, z) = ((m-2)x + 2y - z, 2x + my + 2z, 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z)$$

demostreu que la dimensió del nucli és zero excepte per a valors particulars de m. Per a aquests valors doneu dimensions i bases del nucli i de la imatge.