Llista 5: Matrius i determinants.

1. Calculeu els determinants següents:

$$(a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \qquad (b)\ \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(c)\ \begin{vmatrix} 1+i & 1 & 2 & 0 \\ 2+i & 3 & 4 & 3 \\ 4+i & 2 & 3 & 2 \\ 1-i & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \qquad (d)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

2. Calculeu els determinants següents:

$$(a)\ \begin{vmatrix} 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad (c)\ \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

3. Resoleu les equacions:

$$(a)\ \begin{vmatrix} 3 & x & 0 \\ 1 & -1 & x \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = 4 \qquad (b)\ \begin{vmatrix} 1+x & x & x & x \\ x & 1+x & x & x \\ x & x & 1+x & x \\ x & x & x & 1+x \end{vmatrix} = 0.$$

4. Trobeu la matriu X que satisfà:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Invertiu les següents matrius:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Demostreu que la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

no és invertible trobant un vector x diferent de 0 tal que $Ax = 0$.

7. Demostreu que si A és una matriu invertible, aleshores A^t és invertible i $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

8. Demostreu que tota matriu quadrada es pot escriure com a suma d'una matriu simètrica i una antisimètrica.

9. Trobeu els valors del paràmetre λ per als quals la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

té inversa. Calculeu la inversa per a $\lambda = 1$.