

Llista 4: Operacions amb matrius.

1. Calculeu els productes

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

2. Calculeu els dos productes escalars i el producte matricial:

$$(1 \quad -2 \quad 7) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad (1 \quad -2 \quad 7) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} (3 \quad 5 \quad 1)$$

El primer producte dóna el quadrat de la longitud del vector.

3. Escriviu matrius A i B de tamany 3×2 amb entrades $a_{ij} = i + j$ i $b_{ij} = (-1)^{i+j}$, respectivament.

4. Doneu un exemple 3×3 de

- (a) matriu diagonal: $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$
- (b) matriu simètrica: $a_{ij} = a_{ji}$ per a tot i, j
- (c) matriu triangular superior: $a_{ij} = 0$ si $i > j$
- (d) matriu antisimètrica: $a_{ij} = -a_{ji}$ per a tot i, j

$A = 0$ serveix per a tots els casos, però heu de donar-ne altres.

5. Digueu si els següents enunciats són certs o falsos. En cas que la vostra resposta sigui *Fals* justifiqueu-la amb un exemple.

- (a) Si la primera i la tercera columna de la matriu B són iguals, també són iguals la primera i la tercera columna de qualsevol producte AB
- (b) Si la primera i la tercera fila de la matriu B són iguals, també són iguals la primera i la tercera fila de qualsevol producte AB
- (c) Si la primera i la tercera fila de la matriu A són iguals, també són iguals la primera i la tercera fila de qualsevol producte AB
- (d) $(AB)^2 = A^2B^2$

6. Trobeu exemples de matrius 2×2 amb coeficients reals, tals que

- (a) $A^2 = -Id$
- (b) $B^2 = 0$, amb $B \neq 0$
- (c) $CD = -DC$, amb $CD \neq 0$
- (d) $EF = 0$, amb tots els coeficients de E i F diferents de zero

7. Demostreu que si A és una matriu 2×2 tal que $AB = BA$ per a tota matriu B , aleshores A és un múltiple de la identitat.

8. Quines de les següents matrius coincideixen amb $(A + B)^2$?

$$(B + A)^2, \quad A^2 + 2AB + B^2, \quad A(A + B) + B(A + B), \\ (A + B)(B + A), \quad A^2 + AB + BA + B^2$$

Indiqueu quina propietat es fa servir per justificar la resposta.

9. Les matrius de rotació al pla són

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

- (a) Comproveu que $A(\alpha_1)A(\alpha_2) = A(\alpha_1 + \alpha_2)$
(Useu les fórmules de sinus i cosinus de la suma)
- (b) Quant val el producte $A(\alpha)A(-\alpha)$?