Llista 3: Espais vectorials i aplicacions lineals.

1. Estudieu quines de les següents afirmacions són certes:
   (a) $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.
   (b) $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid t > 0\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$.
   (c) $F_3 = \{(x, y, 2x - 3y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.
   (d) $F_4 = \{(x + y, y + 1, x - y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

2. Sigui $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espai vectorial de les funcions reals amb les operacions habituals de la suma, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)\ \forall f, g \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, i producte per escalars $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)\ \forall f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Estudieu si els següents subconjunts són subespais vectorials de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:
   (a) $V_1 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$;
   (b) $V_2 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = f(0)\}$;
   (c) $V_3 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(-x) = f(x)^2\}$;
   (d) $V_4 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ creixent}\}$;
   (e) $V_5 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ constant}\}$.

3. Sigui $X = \{a, b\}$ i $F(X, \mathbb{R})$ el conjunt d'aplicacions de X en $\mathbb{R}$. Demostreu que $F(X, \mathbb{R})$ és un espai vectorial de dimensió 2 i doneu-ne una base natural.

4. Cosidereu les funcions $f_1, f_2 \in F(X, \mathbb{R})$ definides segons:
   $$f_1(a) = 2,\ \ f_1(b) = 3; f_2(a) = 3,\ \ f_2(b) = 5.$$
   Demostreu que f_1 i f_2 són una base de $F(X, \mathbb{R})$. Expresseu la funció f tal que $f(a) = 4$ i $f(b) = 7$ en funció de la base que heu donat a l'exercici anterior.

5. A l'espai $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es consideren les funcions f, g, h definides per $f(t) = t^2 + 2t - 1$, $g(t) = t^2 + 1$ i $h(t) = t^2 + t$. Digueu si són linealment dependents o independents.

6. Determineu quines de les següents aplicacions són lineals:
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on $f(x, y) = x + y$;
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on $f(x, y) = x^2 y^2$;
   (c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, on $f(x, y, z) = (x + 7, 2y, x + y + z)$;
   (d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, on $f(x, y, z) = (x + a, by, x + y + z)$;
   (e) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, on $f(x, y) = (xy, x)$;

7. Considereu l'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donada per
   $$f(x, y, z = (x + y + \alpha, z - y + \beta))$$
   on $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calculeu α i β per tal que f sigui lineal.

8. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'aplicació definida per $f(x, y, z) = (x - y + z, y - z, x - 2y + 2z)$.
   (a) Proveu que f és lineal.
   (b) Determineu bases de Nuc$f$ i de Imf.