

Llista 2: sistemes d'equacions i espais vectorials.

Sistemes d'equacions

1. Descriu la intersecció dels tres plans (de l'espai 4-dimensional) $u+v+w+z = 6$, $u+w+z = 4$ i $u+w = 2$. És una recta o un punt o un conjunt buit? Quina és la intersecció si hi afegim el pla $u = -1$?
2. Expliqueu per què el sistema

$$\begin{aligned}x + y + z &= 2 \\x + 2y + 3z &= 1 \\y + 2z &= 0\end{aligned}$$

és incompatible. Reemplaçeu el terme independent de la tercera equació per un valor que faci el sistema compatible. Doneu-ne una solució.

3. El sistema de l'exercici anterior es pot escriure

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = b$$

Expresseu la tercera columna com a combinació lineal de les dues primeres. Quines són les solucions del sistema si $b = (0, 0, 0)$?

4. Apliqueu eliminació i substitució per resoldre el sistema

$$\begin{aligned}2x - 3y &= 3 \\4x - 5y + z &= 7 \\2x - y - 3z &= 5\end{aligned}$$

Quins nombres heu fet servir com a pivots? Quines operacions de *sumar a una fila un múltiple d'una altra* heu fet?

5. Considereu el sistema

$$\begin{aligned}x + y + z &= 2 \\x + 3y + 3z &= 0 \\x + 3y + 5z &= 2\end{aligned}$$

Quin sistema triangular obteniu després de fer eliminació? Quina és la solució?

6. Apliqueu eliminació al sistema

$$\begin{aligned}x + y + z &= -2 \\3x + 3y - z &= 6 \\x - y + z &= -1\end{aligned}$$

Si trobeu un zero a la posició de pivot, intercanvieu l'equació per la que hi ha a sota i continueu. Quin coeficient de y (enlloc del -1) a la tercera equació fa que s'interrompi el procés d'eliminació?

Espais Vectorials

7. Digueu si els següents vectors són linealment dependents o independents:

(a) $(-6, 9, -3)$, $(2, -3, 1)$ a \mathbb{R}^3 ;

(b) $(2, 1, 4)$, $(1, -1, 3)$, $(3, 2, 5)$ a \mathbb{R}^3 ;

8. Estudieu si els següents conjunts de vectors determinen una base de l'espai.

(a) $v_1 = (-1, 2)$, $v_2 = (3, 4)$ a \mathbb{R}^2 ;

(b) $w_1 = (2, -1/5)$, $w_2 = (10, -1)$ a \mathbb{R}^2 ;

(c) $t_1 = (-1, 0, 5)$, $t_2 = (2, 3, -1)$, $t_3 = (1, 1/2, 10)$ a \mathbb{R}^3 .

9. Demostreu que els vectors $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 2)$ i $e_3 = (1, 2, 3)$ formen una base de \mathbb{R}^3 .
Expresseu en aquesta base el vector $(6, 9, 14)$.

10. Demostreu que els vectors $e_1 = (0, 1, -2, 1)$, $e_2 = (1, 1, 2, -1)$, $e_3 = (1, 0, 0, 1)$ i $e_4 = (2, 2, 0, -1)$ formen una base de \mathbb{R}^4 . Expresseu en aquesta base el vector $(4, 2, -1, 5)$.