

# Llista 1: Inducció, conjunts, aplicacions i relacions.

## Inducció

1. Demostreu per inducció les fórmules següents:

(a)  $1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(b)  $1^2 + 2^2 + \dots + (n - 1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c)  $1^3 + 2^3 + \dots + (n - 1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(d)  $2^n > n$

(e)  $2^n < n!$  per a  $n \geq 4$ , on  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$

(f)  $x^n - 1$  és divisible per  $x - 1$ .

2. Demostreu la fórmula per a sumar una progressió geomètrica de raó  $r$  (amb  $r \neq 1$ ),

$$1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

3. Demostreu la següent igualtat:

$$1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + (n - 1)(n - 1)! = n!$$

4. Demostreu que la fórmula

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{(2n + 1)^2}{8}$$

val per a  $n + 1$  si val per a  $n$ . Per a quins valors de  $n$  és vàlida?

5. La *successió de Fibonacci* es defineix de manera recurrent segons:

- $F_1 = F_2 = 1$ ,
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  si  $n \geq 3$ .

Proveu que els termes venen donats per la fórmula següent:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

6. Siguin  $\alpha$  i  $\beta$  dos nombres reals tals que l'equació  $X^2 - \alpha X - \beta$  té dues arrels diferents, que denotem  $r$  i  $s$ . Considereu la successió definida per  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$  i  $u_n = \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2}$  si  $n \geq 2$ . Demostreu que

$$u_n = \frac{r^n - s^n}{r - s}.$$

7. Demostreu que la suma dels angles interiors d'un polígon de  $n + 2$  vèrtexs inscrit a una circumferència és  $\pi n$  radians.

8. Demostreu que hi ha exactament  $2^n$  subconjunts d'un conjunt que conté  $n$  elements.

9. Demostreu que per a tot  $n \geq 2$  es compleix:

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.$$

10. Donat un nombre natural  $n$  i un enter  $k$ , es defineix el nombre combinatori  $\binom{n}{k}$  com

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ si } n \geq k > 0, \quad \binom{n}{k} = 0 \text{ si } k < 0 \text{ o si } k > n.$$

(a) Proveu que es compleix la següent relació:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

(b) Proveu que els nombres combinatoris són sempre nombres naturals.

(c) Demostreu per inducció la fórmula del *binomi de Newton*:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

## Conjunts

11. Definim els següents conjunts:  $E = \{x \mid x = 2n \text{ per } n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $O = \{x \mid x = 2n-1 \text{ per } n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 3\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 7\}$  i  $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}$

(a) Descriu en paraules els conjunts  $E$ ,  $O$  i  $I$ .

(b) Troba  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  i  $A^c$ .

12. Si  $A = \{1, 2\}$  i  $B = \{1, 2, 3\}$ , determineu els conjunts  $A \times B$ ,  $B \times A$ ,  $A^2$  i  $B^2$ .

13. Determineu el conjunt  $(A \times A) \cap B \times B$ , essent  $A = \{a, b, c\}$  i  $B = \{a, b, m\}$ .

14. Siguin  $A$  i  $B$  dos subconjunts no buits d'un conjunt  $S$ . Proveu les anomenades lleis de Morgan:

(a)  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ,

(b)  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .

15. Determineu  $\mathcal{P}(A)$  si  $A = \{a, b, c, d\}$ .

## Aplicacions

16. Quines de les següents aplicacions de  $\mathbb{Z}$  en  $\mathbb{Z}$  són injectives, exhaustives o bijectives?

(a)  $f(x) = x + 2$ .

(b)  $f(x) = 4x$ .

(c)  $f(x) = 2x^2 + 1$ .

(d)  $f(x) = x^2 - x$ .

(e)  $f(x) = \lfloor \frac{x}{3} \rfloor$ .

(f)  $f(x) = 2x^2 + x$ .

17. Quines de les següents aplicacions de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  són injectives, exhaustives o bijectives?

(a)  $f(x) = x^2$ .

(b)  $f(x) = x^3 - x$ .

(c)  $f(x) = 2^x$ .

(d)  $f(x) = x^3$ .

- (e)  $f(x) = 4x$ .
- (f)  $f(x) = 2x^2 + x$ .
18. Considereu l'aplicació de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{Q}$  definida per  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$  i l'aplicació de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{Q}$  definida per  $g(x) = 2x^2 + x + 5$ . Trobeu les aplicacions  $f \circ g$  i  $g \circ f$ .
19. Considereu l'aplicació de  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  en  $\mathbb{Q}$  definida per  $f(x, y) = 2x^2 + 5y$ , i l'aplicació de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  definida per  $g(x) = (3x + 5, x^2 + 1)$ . Trobeu les aplicacions  $g \circ f$  i  $f \circ g$ .
20. Sigui  $f : X \rightarrow Y$  una aplicació i siguin  $A$  i  $B$  subconjunts de  $X$ . Proveu que:
- (a)  $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$ ,
- (b)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$  i  $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ ,
- (c) Si  $f$  és injectiva aleshores  $A = f^{-1}(f(A))$  i  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .

## Relacions

20. Considera la relació en els nombres reals donada per " $\equiv$ ". És una relació d'equivalència?
21. Sigui  $f : X \rightarrow Y$  una aplicació entre conjunts. Definim una relació en  $X$  segons la qual dos elements estan relacionats si i només si tenen la mateixa imatge per  $f$ . Proveu que aquesta és una relació d'equivalència.
22. Considereu la relació  $R$  definida en els nombres enters  $\mathbb{Z}$  per

$$\text{si } x, y \in \mathbb{Z}, \text{ aleshores } xRy \iff x - y = \overset{\cdot}{3}$$

Aquesta relació s'anomena congruència mòdul 3 i la notació  $\overset{\cdot}{3}$  significa múltiple de 3. Proveu que és una relació d'equivalència. Trobeu les classes d'equivalència i el conjunt quocient  $\mathbb{Z}/R$ .

23. En el conjunt dels nombres enters es defineix la relació següent:

$$aRb \iff b - a = m, m \in \mathbb{N}.$$

Es diu en aquest cas que els nombres  $a$  i  $b$  són *congruents mòdul  $m$* .

- (a) Comproveu que és una relació d'equivalència.
- (b) Trobeu les classes d'equivalència.
- (c) Trobeu el conjunt quocient.
24. Considera el conjunt  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$  de parelles formades per un nombre enter i un nombre enter diferent de zero. Aquí hi definim una relació de la següent manera:

$$(a, b)R(c, d) \iff ad = bc$$

- (a) Demuestra que  $R$  és una relació d'equivalència.
- (b) Identifica el conjunt quocient de  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$  per la relació  $R$  amb el conjunt dels nombres racionals  $\mathbb{Q}$ .