

FME — ÀLGEBRA ABSTRACTA  
LA RESULTANT-2004

Sigui  $A$  un domini d'integritat i  $K$  el seu cos de fraccions. Considerem els polinomis  $f, g \in A[x]$  de graus  $n$  i  $m$ , respectivament. Sigui  $L$  un cos de descomposició per  $f$  i  $g$ . Posem

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n) \\ g(x) &= b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 = b_m(x - \beta_1) \cdots (x - \beta_m). \end{aligned}$$

**Definició:** La resultant dels polinomis  $f$  i  $g$  és

$$\text{Res}(f, g) := a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j).$$

## 1 Propietats bàsiques

**Ex 1.** Si  $f, g \neq 0$ , demostreu que  $\text{Res}(f, g) = 0$  si i només si  $f$  i  $g$  tenen alguna arrel en comú.

**Ex 2.** Demostreu que  $\text{Res}(f, g) = a_n^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i)$ . Deduïu que  $\text{Res}(f, g) \in A$ .

**Ex 3.** Demostreu que  $\text{Res}(g, f) = (-1)^{nm} \text{Res}(f, g)$ .

**Ex 4.** Demostreu la igualtat  $\text{Res}(f_1 f_2, g) = \text{Res}(f_1, g) \text{Res}(f_2, g)$  i també que  $\text{Res}(f, x^m) = (-1)^{nm} a_0^m$ .

**Ex 5.** Recordem que el discriminant d'un polinomi és  $\text{disc}(f) = a_n^{2n-2} \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ . Demostreu que  $\text{disc}(fg) = \text{disc}(f) \text{disc}(g) \text{Res}(f, g)^2$ .

**Ex 6.** Demostreu que si  $f \neq 0$ , aleshores  $\text{Res}(f, f') = (-1)^{n(n-1)/2} a_n \text{disc}(f)$ . Deduïu que  $f$  té arrels múltiples (a  $L$ ) si i només si  $f$  i  $f'$  tenen arrels en comú.

**Ex 7.** Sigui  $p$  un primer senar. Considerem el polinomi ciclotòmic  $\Phi_p(x) = (x^p - 1)/(x - 1) = x^{p-1} + \cdots + x + 1$ . Demostreu que  $\text{disc}(\Phi_p) = (-1)^{(p-1)/2} p^{p-2}$ .

## 2 Aspectes computacionals

Molts manipuladors algebraics (Maple, Mathematica, Pari, Magma, Kash, Kant, GAP,...) tenen incorporat el càlcul de resultants. Familiaritzeu-vos-hi!

**Ex 8.** Trobeu un punt de coordenades racionals comú a les corbes algebraiques  $f(x, y) = -36 + x y^2 + x^2 y^5$  i  $g(x, y) = 3 - 3x^7 - 4y + x y^3$ .

**Ex 9.** Fent servir el determinant de Vandermonde, justifiqueu el mètode de Sylvester (1840) per al càlcul de resultants (cf. problemes 30 i 31 de la llista). Fent servir aquest mètode, calculeu la resultant dels polinomis  $f(x) = x^3 + 4x - 1$  i  $g(x) = 2x^2 + 3x + 7$ .

**Ex 10.** Un altre mètode per al càlcul de la resultant és el següent. Amb les notacions anteriors, considerem la divisió euclidiana de  $f$  i  $g \neq 0$  a  $K[x]$ ; és a dir,  $f = gq + r$  amb  $r = 0$  o bé  $\deg(r) < \deg(g)$ . Demostreu que la  $\text{Res}(f, g) = (-1)^{nm} b_m^{n-\deg(r)} \text{Res}(g, r)$ . Fent servir aquest altre mètode, calculeu la resultant de  $f(x) = x^3 + 4x - 1$  i  $g(x) = 2x^2 + 3x + 7$ .

### 3 Algunes aplicacions

Siguin  $\alpha$  i  $\beta \in \overline{K}$ , i siguin  $f(x) = \text{Irr}(\alpha, K, x)$  i  $g(x) = \text{Irr}(\beta, K, x)$ . Sigui  $L$  un cos de descomposició per  $f$  i  $g$ . Posem

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n), \quad \text{amb } \alpha_1 = \alpha; \\ g(x) &= x^m + \cdots + b_1 x + b_0 = (x - \beta_1) \cdots (x - \beta_m), \quad \text{amb } \beta_1 = \beta. \end{aligned}$$

**Ex 11.** Quines són les arrels de  $g(x - t)$  a  $L[x][t]$ ? Comproveu que  $h(x) := \text{Res}(f(t), g(x - t)) = (-1)^{nm} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j - x)$ . En particular,  $h$  té per arrel  $\alpha + \beta$ .

**Ex 12.** Trobeu un polinomi a coeficients racionals que tingui per arrel  $\sqrt[4]{5} + \sqrt[5]{4}$ .

**Ex 13.** Comproveu que  $h(x) := \text{Res}(t^n f(x/t), g(t))$  té per arrel  $\alpha\beta$ .

**Ex 14.** Trobeu un polinomi a coeficients racionals que tingui per arrel  $\sqrt[4]{5} \sqrt[5]{4}$ .

**Ex 15.** Comproveu que  $f(-x)$  té per arrel  $-\alpha$  i  $x^n f(1/x)$  té per arrel  $1/\alpha$ .

**Ex 16.** Sigui  $\alpha$  i  $\beta$  dos nombres reals tals que  $\alpha^3 = \alpha + 1$  i  $\beta^4 = \beta + 1$ . Fent ús de manipuladors algebraics, calculeu el polinomi irreductible de

$$\frac{\frac{1 + \sqrt[3]{2}}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \alpha^2 \beta}{(\alpha + \beta)(\sqrt[4]{5} + \sqrt[5]{4})}.$$

**Ex 17.** Sigui  $p$  un polinomi de  $K[x]$  i  $f$  com abans. Comproveu que  $h(x) := \text{Res}(x - p(t), f(t)) = (-1)^{n \deg(p)} \prod_{i=1}^n (x - p(\alpha_i))$ . Observeu que  $p(\alpha)$  és arrel de  $h$ .

**Ex 18.** Sigui  $\alpha$  una arrel del polinomi  $x^4 + x + 1$ . Calculeu un polinomi que tingui per arrel  $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$ .